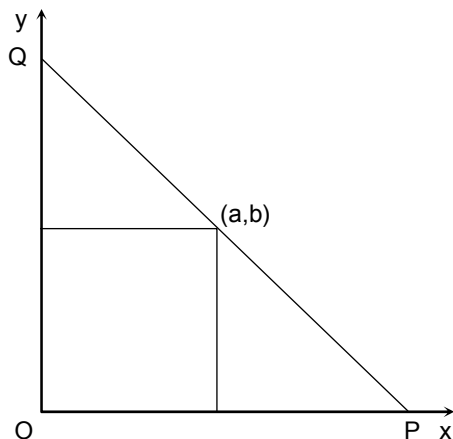


MATEMÁTICA

01. Sejam (a, b) , com a e b positivos, as coordenadas de um ponto no plano cartesiano, e r a reta com inclinação $m < 0$, que passa pelo ponto (a, b) . A reta r intercepta o eixo das abscissas no ponto P , e o eixo das ordenadas no ponto Q , definindo desta maneira um triângulo OPQ , com O sendo a origem do sistema de coordenadas, como ilustrado a seguir.



Avalie a veracidade das afirmações a seguir, referentes a esta configuração.

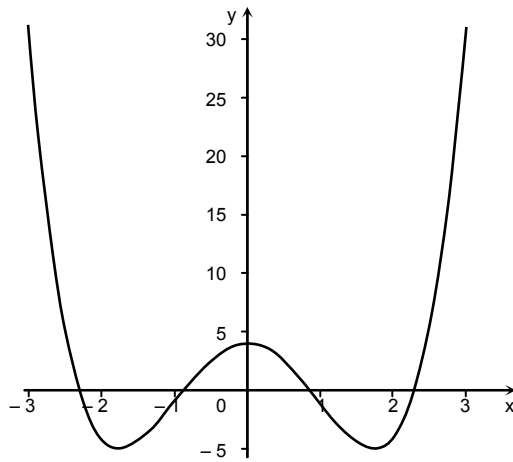
- 0-0) A equação de r é $y = mx + b - ma$
1-1) $P = (a + b/m, 0)$ e $Q = (0, b - ma)$
2-2) A área do triângulo OPQ é $ab - (ma^2 + b^2/m)/2$
3-3) A área de OPQ é sempre $\geq 2ab$
4-4) Para o triângulo OPQ ter a menor área possível, a reta r deve interceptar os eixos coordenados nos pontos $P = (2a, 0)$ e $Q = (0, 2b)$.

Resposta: VFVVV

Solução:

A equação da reta r é $y - b = m(x - a)$, que se simplifica como $y = mx + b - ma$. A interseção de r com o eixo das abscissas é o ponto $(a - b/m, 0)$ e, com o eixo das ordenadas, é $(0, b - ma)$. A área do triângulo OPQ é dada por $(a - b/m)(b - ma)/2 = ab - ma^2/2 - b^2/(2m) = ab - (ma^2 + b^2/m)/2$. A área de OPQ será maior ou igual que $2ab$, se e somente se $-(ma^2 + b^2/m)/2 \geq ab$ ou $m^2a^2 + 2abm + b^2 \geq 0$ ou $(ma + b)^2 \geq 0$, que é verdadeira para todo $m < 0$ e a e b reais positivos. Assim, o menor valor que a área de OPQ pode ter é $2ab$, atingido quando $m = -b/a$ e $P = (2a, 0)$, $Q = (0, 2b)$.

02. Seja $p(x)$ um polinômio com coeficientes reais, com coeficiente líder 1, de grau 4, satisfazendo: $p(x) = p(-x)$ para todo x real, $p(0) = 4$ e $p(1) = -1$. Parte do gráfico de $p(x)$ está esboçado a seguir.



Analise as afirmações a seguir, acerca de $p(x)$.

0-0) $p(x) = x^4 + 6x^2 + 4$

1-1) As raízes de $p(x)$ são $\pm\sqrt{3 \pm \sqrt{5}}$, para qualquer escolha dos sinais positivos e negativos.

2-2) As raízes de $p(x)$ são $\frac{\pm\sqrt{10} \pm \sqrt{2}}{2}$, para qualquer escolha dos sinais positivos e negativos.

3-3) $p(x) = (x^2 - 3)^2 + 5$

4-4) O valor mínimo de $p(x)$ ocorre em $x = \pm\sqrt{3}$

Resposta: FVVFV

Solução:

Seja $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$. De $p(x) = p(-x)$, temos $a = -a$ e $c = -c$, logo, $a = c = 0$, e $p(x) = x^4 + bx^2 + d$. Da hipótese $p(0) = 4$ temos $d = 4$ e de $p(1) = -1$ temos que $b = -6$. Portanto, $p(x) = x^4 - 6x^2 + 4$.

Temos $p(x) = (x^2 - 3)^2 - 5$, daí $p(x) = 0$ se $x^2 - 3 = \pm\sqrt{5}$ e $x = \pm\sqrt{3 \pm \sqrt{5}}$.

Temos $p(x) = (x^2 + 2)^2 - 10x^2$, daí $p(x) = 0$ se $x^2 + 2 = \pm\sqrt{10}x$ e $x = (\pm\sqrt{10} \pm \sqrt{2})/2$.

De ser $p(x) = (x^2 - 3)^2 - 5$, segue que o valor mínimo de $p(x)$ é -5 e ocorre para $x = \pm\sqrt{3}$.

03. Para cada número real α , defina a matriz

$$M(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Analise as afirmações seguintes acerca de $M(\alpha)$:

0-0) $M(0)$ é a matriz identidade 3×3

1-1) $M(\alpha)^2 = M(2\alpha)$

2-2) $M(\alpha)$ tem determinante 1

3-3) $M(\alpha)$ é invertível, e sua inversa é $M(-\alpha)$

4-4) Se $M(\alpha)^t$ é a transposta de $M(\alpha)$, então, $M(\alpha)M(\alpha)^t = M(0)$.

Resposta: VVVVV

Solução:

Temos

$$M(0) = \begin{bmatrix} \cos 0 & -\operatorname{sen} 0 & 0 \\ \operatorname{sen} 0 & \cos 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Desenvolvendo o determinante pela terceira linha, temos que

$$\det M(\alpha) = \det \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$(-1)^{3+3}(\cos^2 \alpha - (-\operatorname{sen}^2 \alpha)) = 1.$$

Temos

$$M(\alpha)^2 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha & -2\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha & 0 \\ 2\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos(2\alpha) & -\operatorname{sen}(2\alpha) & 0 \\ \operatorname{sen}(2\alpha) & \cos(2\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = M(2\alpha).$$

$$\text{Temos } M(-\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha & 0 \\ -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$M(\alpha)M(-\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha & 0 \\ -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Temos } M(\alpha)M(\alpha)^t = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha & 0 \\ -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = M(0).$$

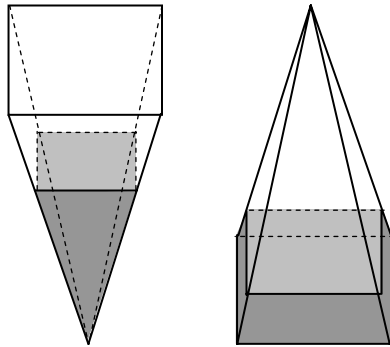
- 04.** Uma fábrica tem 2.000 unidades de certo produto em estoque e pode confeccionar mais 100 unidades deste produto por dia. A fábrica recebeu uma encomenda, de tantas unidades do produto quantas possa confeccionar, para ser entregue em qualquer data, a partir de hoje. Se o produto for entregue hoje, o lucro da fábrica será de R\$ 6,00 por unidade vendida; para cada dia que se passe, a partir de hoje, o lucro diminuirá de R\$ 0,20 por unidade vendida. Calcule o lucro máximo, em reais, que a fábrica pode obter com a venda da encomenda e indique a soma de seus dígitos.

Resposta: 08

Solução:

Se a fábrica demora x dias para entregar a encomenda então vai ter $2000 + 100x$ unidades que serão vendidas com um lucro por unidade de $6 - 0,2x$; o lucro total será de $f(x) = (2000 + 100x)(6 - 0,2x) = -20x^2 + 200x + 12000$. Completando quadrados, temos $f(x) = -20(x - 5)^2 + 12500$. Desta expressão para $f(x)$, concluímos que o valor máximo que $f(x)$ pode assumir é 12500, para a escolha de $x = 5$.

- 05.** Na ilustração a seguir, à esquerda, uma pirâmide regular invertida, com base quadrada de lado medindo 2 e altura 6, está preenchida por um líquido, até dois terços de sua altura. Se a pirâmide é colocada na posição ilustrada à direita, qual será então a altura h do líquido? Indique $(h + 2\sqrt[3]{19})^2$.



Resposta: 36

Solução: O volume de líquido é $(2/3)^3 = 8/27$ do volume da pirâmide. Portanto, na pirâmide da direita, o volume da pirâmide quadrada acima da água é $(1 - 8/27) = 19/27$ do volume da pirâmide. Daí, se h é a altura da água na pirâmide à direita, temos que a pirâmide menor tem altura $(6 - h)$ e lado da base $(6 - h)/3$; segue que $[(6 - h)/3]^2(6 - h)/3 = 19/27 \cdot 2^2 \cdot 6/3$ e daí $(6 - h)^3 = 19 \cdot 8$ e $h = 6 - 2\sqrt[3]{19}$ e

$$(h + 2\sqrt[3]{19})^2 = 6^2 = 36.$$

- 06.** Na população de uma cidade, 50% das pessoas têm sangue do tipo A, e as demais têm sangue dos outros tipos (B, AB ou O). Se 6 pessoas da cidade são escolhidas ao acaso, qual a probabilidade percentual de exatamente 3 delas terem sangue do tipo A? Indique o inteiro mais próximo do valor percentual obtido.

Resposta: 31

Solução:

O número de maneiras de escolher três pessoas de um grupo de 6 é $6 \cdot 5 \cdot 4 / (3 \cdot 2 \cdot 1) = 20$, e a probabilidade percentual de as 3 terem sangue do tipo A é $20 \cdot 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 5/16 = (125/4)\% = 31,25\%$.

- 07.** Um modelo novo de motor está equipado com três mecanismos, A, B e C, para economizar combustível. Os mecanismos A, B e C economizam, respectivamente, 20%, 30% e 50%, em comparação com os mecanismos antigos. Quando os três mecanismos são utilizados conjuntamente, quanto se economiza, percentualmente, de combustível?

Resposta: 72

Solução:

Os novos mecanismos gastam 80%, 70% e 50% do que gastavam os anteriores. Usando os três mecanismos conjuntamente, a economia será de $(1 - 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,5)100\% = 72\%$.

- 08.** Quantas soluções a equação trigonométrica

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{1 - \cos x}$$

admite, no intervalo $[0, 80\pi)$?

Resposta: 80

Solução: Da equação dada segue que $\operatorname{sen}^2 x = (1 - \cos x)$ e que $1 - \cos^2 x = 1 - \cos x$. Esta última igualdade é equivalente a $\cos x (\cos x - 1) = 0$. $\cos x = 0$ e $\operatorname{sen} x = 1$ têm juntas as soluções $x = \pi/2 + 2k\pi$, enquanto $\cos x = 1$ e $\operatorname{sen} x = 0$ têm as soluções $x = 2k\pi$. Portanto, a equação tem duas soluções em cada intervalo $[2k\pi, (2k+2)\pi)$, e a equação dada tem 80 soluções no intervalo $[0, 80\pi)$.

- 09.** Um martini seco é uma mistura de 15 partes de gin com uma parte de vermute. O gin contém 40% de álcool, e o vermute, 20%. Qual o percentual de álcool em uma dose de martini seco? Indique o valor inteiro mais próximo.

Resposta: 39

Solução:

O percentual de álcool em uma dose de martini seco será de $(15 \cdot 0,4 + 1 \cdot 0,2) / 16 = 6,2 / 16 = 3,1 / 8 = 38,75\%$.

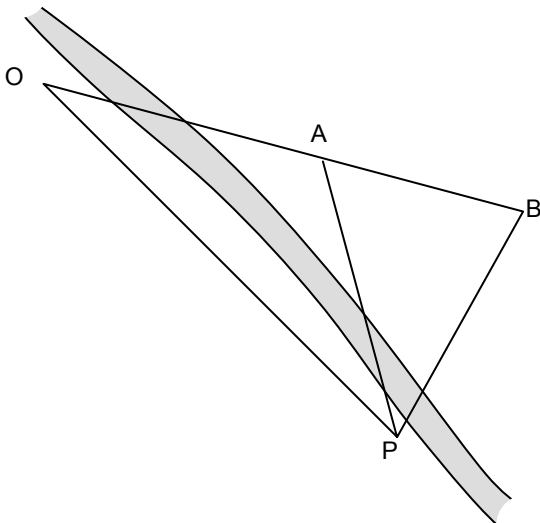
- 10.** Um teste para uma DST dá o resultado correto em 98% dos casos; ou seja, se uma pessoa tem a doença e faz o teste, este terá 98% de probabilidade de ser positivo; e, se uma pessoa não tem a doença e faz o teste, este terá 98% de probabilidade de ser negativo. Admita que, da população de uma grande cidade, 0,5% tem a DST. Se uma pessoa da cidade se submete ao teste e o resultado foi positivo, qual a probabilidade percentual de ela ter a DST? Indique o valor inteiro mais próximo.

Resposta: 20

Solução:

A probabilidade de uma pessoa não ter a DST e o teste dar positivo é de $0,02 \cdot 99,5 = 1,99\%$, e a probabilidade de a pessoa ter a doença e o teste ser positivo é de $0,98 \cdot 0,5 = 0,49\%$. Portanto, a probabilidade de uma pessoa que tem o teste positivo ser portadora da doença é de $0,49 / (1,99 + 0,49) \approx 0,1976 = 19,76\%$.

- 11.** Na ilustração abaixo, a casa situada no ponto B deve ser ligada com um cabo subterrâneo de energia elétrica, saindo do ponto A. Para calcular a distância AB, são medidos a distância e os ângulos a partir de dois pontos O e P, situados na margem oposta do rio, sendo O, A e B colineares. Se $\angle OPA = 30^\circ$, $\angle POA = 30^\circ$, $\angle APB = 45^\circ$ e $OP = (3 + \sqrt{3})$ km, calcule AB em hectômetros.

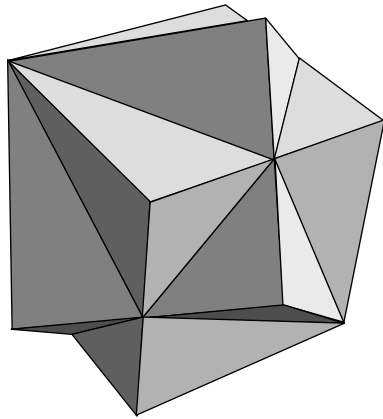


Resposta: 20

Solução:

Usando a Lei dos senos no triângulo OPA temos $AP/(1/2) = (3 + \sqrt{3})/(\sqrt{3}/2)$ e $AP = (\sqrt{3} + 1)\text{km}$. Novamente, da Lei dos senos no triângulo APB, segue que $AB/(\sqrt{2}/2) = (\sqrt{3} + 1)/\sin 75^\circ$. Temos $\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = 1/2 \cdot \sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 \cdot \sqrt{3}/2 = \sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)/4$ e substituindo na igualdade anterior, obtemos $AB = \sqrt{2}/2 \cdot 4/\sqrt{2} = 2\text{km} = 20\text{hm}$.

12. O cubo duplo, ilustrado a seguir, é construído a partir de um cubo, de aresta 2cm, adicionando, em cada uma de suas faces, um tetraedro, que é congruente ao obtido do cubo cortando-o por um plano que passa pelos pontos médios de duas arestas incidentes em um vértice, e pelo outro extremo da terceira aresta que incide no vértice.



Calcule a área da superfície do cubo duplo, em cm^2 .

Resposta: 30

Solução:

Em cada face do cubo de aresta 2, temos que a área correspondente ao cubo duplo é $4 \cdot 1 \cdot 2/2 + 2 \cdot 1 \cdot 1/2 = 5$ e a área total é $6 \cdot 5 = 30\text{cm}^2$.

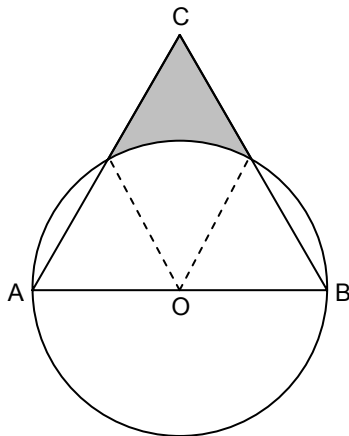
13. Se b e c são naturais escolhidos aleatoriamente no conjunto $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$, qual a probabilidade percentual de as raízes da equação $x^2 + bx + c = 0$ não serem reais?

Resposta: 38

Solução:

As raízes da equação não serão reais se e somente se $b^2 - 4c < 0$ ou $c > b^2/4$. Obtemos, desta maneira, os pares (b, c) : se $b = 1$ então c pode ser qualquer um dos 10 valores possíveis; se $b = 2$ então $c > 1$ e c pode ser 2, 3, ..., 10; se $b = 3$ então c pode ser 3, 4, 5, ..., 10; se $b = 4$ então c pode ser 5, 6, ..., 10; se $b = 5$ então $c = 7, 8, 9, 10$; se $b = 6$ então $c = 10$ e, para $b > 6$ não existem valores possíveis de c . O total de pares (b, c) é $10 \cdot 10 = 100$, e os casos possíveis totalizam $10 + 9 + 8 + 6 + 4 + 1 = 38$ e a probabilidade é $38/100 = 38\%$.

14. Na ilustração a seguir, ABC é um triângulo equilátero, e o lado AB contém o centro O da circunferência. Se a circunferência tem raio 6, qual o inteiro mais próximo da área da região sombreada (interior ao triângulo e exterior à circunferência)?



Resposta: 12

Solução:

A área sombreada é a área do losango com vértices opostos O e C subtraída de um sexto da área da circunferência. Portanto, área é $2 \cdot 6^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} - \pi \cdot 6^2 / 6 = 18\sqrt{3} - 6\pi \approx 18 \cdot 1,73 - 6 \cdot 3,14 = 12,3$.

15. Uma pessoa deve a outra a importância de R\$ 17.000,00. Para a liquidação da dívida, propõe os seguintes pagamentos: R\$ 9.000,00 passados três meses; R\$ 6.580,00 passados sete meses, e um pagamento final em um ano. Se a taxa mensal cumulativa de juros cobrada no empréstimo será de 4%, qual o valor do último pagamento? Indique a soma dos dígitos do valor obtido. Dados: use as aproximações $1,04^3 \approx 1,125$, $1,04^7 \approx 1,316$ e $1,04^{12} \approx 1,601$.

Resposta: 14

Solução:

Para a data de hoje, os valores da primeira e da segunda prestações correspondem a $9000/1,04^3 = 8000$ e $6580/1,04^7 = 5000$ e resta a pagar $17000 - 8000 - 5000 = 4000$. O valor da terceira prestação será de $4000 \cdot 1,04^{12} = 6404$ reais.

16. Os 200 estudantes de uma escola que praticam esportes escolhem duas dentre as modalidades seguintes: futebol, handebol, basquete e futebol de salão. Entretanto, nenhum estudante da escola escolheu futebol e basquete ou handebol e futebol de salão. Sabendo que 65% dos alunos escolheram futebol, 60% escolheram futebol de salão, 35% escolheram basquete e 25% dos jogadores de handebol também jogam basquete, quantos são os alunos da escola que jogam futebol e futebol de salão?

Resposta: 70

Solução:

O número de estudantes que escolheu futebol é $0,65 \cdot 200 = 130$, que escolheu futebol de salão é $0,6 \cdot 200 = 120$ e que escolheu basquete é $0,35 \cdot 200 = 70$. O

número de estudantes que jogam handebol é $2.200 - 130 - 120 - 70 = 80$. Se x é o número de estudantes que jogam futebol e futebol de salão então $130 - x$ jogam futebol e handebol, e $80 - (130 - x) = x - 50$ jogam handebol e basquete. Assim, $x - 50 = 0,25 \cdot 80$ e $x = 70$.